数理解析研究所講究録
160巻 1972年 61-67

Schrödinger 型作用素の正の固有値と一意接続定理

（東大・理） 増田 久弥

この講演の目的は、

$$Lu \equiv -\sum \left(\frac{\partial}{\partial x_j}+ib_j(x)\right)a_{jk}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}+ib_k(x)\right)u - qu$$

が、適当な係数に対する条件の下で、L^2での、正の"固値有"をもたないことを、次の簡単な場合について、示すことにあります。

$$(1) \quad \Delta u + qu + k^2 u = 0 \quad (x\in\Omega) \quad k>0.$$

（Ωは、$|x|\geqq R_0$を含む領域）

(1)については、例えば、

F. Rellich (Jahresber. Deutch. Math. Verein. 1943)

$q=0$の場合：

T. Kato (C. P. A. M. 1959) $q=O\left(\frac{1}{r^{1+\varepsilon}}\right)$ $(\varepsilon>0)$

$r=|x|$.

S. Agmon (J. d'anal. Math. 1970)

$$q = q_0 + q_1$$

$$q_0 = o(1),\quad \frac{\partial q_0}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r}\right),\quad q_1 = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

の場合を，（大ざっぱにいえば）扱った。

変数係数の場合，

S. Roze (Mat. Sb. 1969) $\quad q = o\left(\frac{1}{r}\right),\ b_j \equiv 0.$

Ikebe-Uchiyama (R.I.M.S. 1971) $\quad b_j \not\equiv 0.$

を扱っている。 $\quad q = o\left(\frac{1}{r}\right)$

さて，(1)のポテンシャル q に対し次の仮定をおく。

仮定 $\quad q = q_0 + q_1$

(2) $\quad q_0 = o(1),\quad \frac{\partial q_0}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r}\right),\quad q_1 = o\left(\frac{1}{r}\right)$

$\quad (r = |x| \longrightarrow \infty)$

ラプラス作用素 Δ を，極座標表をすると，

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\Lambda$$

（N；次元，Λ は N-1 次元球面上の Laplace-Beltrami 作用素）。よって (1) は，

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{N-1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}\Lambda u + q u + k^2 u = 0$$

となる。変換

$$v = r^{\frac{N-1}{2}} u$$

をすると、v は、次の方程式をみたす；

$$(3) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\Lambda v + \left(q - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + k^2\right)v = 0$$

さて、$\frac{k}{2} > \varepsilon > 0$ なる $\underline{\varepsilon}$ を任意に固定する。

$$q = q_0 + q_1 = q_0 + \frac{\varepsilon}{r} + q_1 - \frac{\varepsilon}{r}$$

と分解し、

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{r^2}\Lambda - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + q_0 + \frac{\varepsilon}{r} + k^2 \\ A_1 = q_1 - \frac{\varepsilon}{r} \end{cases}$$

とおく。(3) は、

$$(4) \quad \frac{d^2 v}{dr^2} + A_0 v + A_1 v = 0 \qquad r \geqq R_0$$

なる、Hilbert space $\mathcal{H} = L^2(S_{N-1})$ （S_{N-1} は $N-1$ 次元単位球面）の中の常微分方程式と考えられる。

A_0、A_1 は次の性質をもつ。十分大きな R_1 が存在して、$r > R_1$ に対して、

$$(5) \quad \left|q_1 - \frac{\varepsilon}{r}\right| \leqq \frac{2\varepsilon}{r}, \text{ i.e. } (A_1 y, y) \leqq \frac{2\varepsilon}{r}\|y\|^2$$

$$(6) \quad -(A_1 y, y) \geqq \frac{\varepsilon}{r}\|y\|^2$$

(7) $(\dot{A}_0 y, y) + 2\,\mathrm{Re}(A_1 y, z)$

$$\geq -\frac{4\varepsilon}{kr}\{\|z\|^2 + (A_0 y, y)\}.$$

$(\forall z \in L^2(S_{N-1}),\ \forall y \in D(A_0))$

ここで、$\dot{A}_0$ は、r について微分した作用素を表わす。

さて、一般的にヒルベルト空間 $\mathbb{H}$ の中で、

(8) $$\frac{d^2u}{dr^2} + \mu(r)\frac{du}{dr} + A_0(r)u + A_1(r)u = 0 \qquad r \geq R_0$$

なる常微分方程式を考えよう。ここで、

$\boxed{\text{仮定 1}}$

(i) $\mu(r) \in L^1_{loc}[R_0, \infty)$

(ii) 各 r に対し、$A_0(r)$ は、対称(閉)作用素で、その定義域は、一定 $(\equiv D_0)$

(iii) 各 $y \in D_0$ に対して、$A_0(r)y$ は、$r \geq R_0$ につき、連続的に(強)微分可能；$\frac{d}{dr}A_0(r)y \equiv \dot{A}_0(r)y$

(iv) $D(A_1(r))$ は、D_0 を含む.

$\boxed{\text{仮定 2}}$ 次の如き、$\gamma(t) \in L^1_{loc}[R_0, \infty)$ があって、

$\|z\|^2 + (A_0 y, y) > 0$ なる任意の $\{y, z\}$
$\in D_0 \times \mathbb{H}$ に対して、評価

$$\mu(r)\|z\|^2 + (\mathring{A}_0 y, y) + 2\,\mathrm{Re}(A_1 y, z) \geq -\gamma(r)\left[\|z\|^2 + (A_0 y, y)\right]$$

が成立する。

$\boxed{\text{仮定3}}$ $\lambda(r) \in L^1_{loc}[R_0, \infty)$ があって、

$$-(A_1 y, y) \geq \lambda(r)\|y\|^2 \quad (\forall y \in D_0)$$

が成立。

この時、

定理: 上の仮定1〜3の下で、(8)の解 u は、次の評価をみたす。

(I) ある r_0 があって、

$$\|u_r(r_0)\|^2 + (A_0(r_0)u(r_0), u(r_0)) > 0$$
$$(u_r = du/dr = u')$$

ならば、ある定数 $C > 0$ があって、

$$\|u_r(r)\|^2 + (A_0(r)u(r), u(r)) \geq C\, e^{-\int_{r_0}^{r} \gamma(\rho)d\rho}$$
$$r \geq r_0.$$

(II) $\forall r \geq R_0$ に対して、

$$\|u_r\|^2 + (A_0 u, u) \leq 0$$

ならば、ある定数 $C_1 > 0$ C_2 があって、

$$\boxed{\|u(r)\|^2 \geq C_1 \exp\Big(C_2 \int_{R_0}^{r} e^{\int_{R_0}^{\rho} \mu(\sigma)d\sigma} + \int_{R_0}^{r} \lambda(\rho) \underbrace{e^{\int_{\rho}^{r} \mu(\sigma)d\sigma}}_{(r-\rho)} d\rho \Big)}$$

これを、承認しよう。その時、(1)の non-trivial な L^2-解は、存在しないことが示される。uを(1)のL^2-解とする。この時、

$$\int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u|^2) dx < \infty$$

と仮定してもいい。$v = r^{\frac{N-1}{2}} u$ は、(4)の解であるから、これは、(8)の特別な場合である；

$$\mu(r) \equiv 0. \quad A_0 = \frac{\Lambda}{r^2} + q_0 - \frac{(N-1)(N-3)}{4r^2} + \frac{\varepsilon}{r} + k^2$$

$$A_1 = q_2 - \frac{\varepsilon}{r}, \quad \lambda(r) = \frac{\varepsilon}{2r}, \quad \gamma(r) = -\frac{4\varepsilon}{kr}.$$

(7), (8), (9)より仮定1〜3を上に定めたA_0, A_1はみたしている。故に、

(II) $\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) \leq 0 \quad (\forall r \geq R_0)$ の場合.

$$\|v(r)\|^2 \geq c\, e^{-C(r-r_0) + \frac{\varepsilon}{2} r(\log r - 1)}$$

$$\therefore \|u(r)\|^2_{L^2(S_{N-1})} \geq C\, r^{-N+1} e^{\frac{\varepsilon}{4} r \log r}$$

(r〜十分大)

これは、$u \in L^2(\Omega)$ に反する。

(I) $\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) > 0 \quad (\exists r > R_0)$ の場合：

$$\|v_r\|^2 + (A_0 v, v) \geq \frac{\text{Const.}}{r^{\delta}}$$

$$(\delta \equiv 4\varepsilon/k)$$

を得る。 $v = r^{\frac{N-1}{2}} u$ より

$$(A_0 v, v) \leqq \text{Const.}\ \|v\|^2 \leqq \text{Const.}\ r^{N-1} \|u\|^2,$$

$$\|v_r\|^2 \leqq r^{N-1} \left\| u_r - \frac{N-1}{2r} u \right\|^2 \leqq \text{Const.}\ r^{N-1} (\|u_r\|^2 + \|u\|^2)$$

故に、

$$\|u_r\|^2 + \|u\|^2 \geq \frac{\text{Const.}}{r^{N-1+\delta}}$$

を得る。

$$\therefore \int_{R_1 \leqq |x| \leqq R} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\, dx \geq \text{Const.}\ R^{1-\delta}$$

となって、故に non-trivial な L^2 解は存在しない。

$u \equiv 0$ in $|x| \geqslant R_1$
解の一意接続定理から
$u \equiv 0$ in Ω.